10.3.9 Výpočet neurčitých integrálů (shrnutí)

Předpoklady: 10308

Př. 1: Vypočti:

a) $\int\left(x^2-1\right)dx$ b) $\int\left(\frac{\cos x}{2}-3\cdot 2^x\right)dx$ c) $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

a) $\int\left(x^2-1\right)dx=\int x^2\,dx-\int 1\,dx=\frac{x^3}{3}-x+C$

b) $\int\left(\frac{\cos x}{2}-3\cdot 2^x\right)dx=\frac{1}{2}\int\cos x\,dx-3\int 2^x\,dx=\frac{1}{2}\sin x-\frac{3}{\ln 2}\cdot 2^x+C$

c) $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=3\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx-2\int x^{-\frac{2}{3}}dx=3\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}-2\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=$

$=3\ln|x|-\frac{1}{x}-6\sqrt[3]{x}+C$

Př. 2: Vypočti $\int(2x-1)^2\,dx$:

a) umocněním mnohočlenu b) substitucí

Porovnej oba výsledky, vysvětli rozdíly.

a) umocněním mnohočlenu

$\int(2x-1)^2\,dx=\int\left(4x^2-4x+1\right)dx=4\int x^2\,dx-4\int x\,dx+\int 1\,dx=4\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+x+C=$

$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$

b) substitucí

$\int(2x-1)^2\,dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^2\,2\,dx=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}=\frac{1}{6}(2x-1)^3=\frac{1}{6}\left(8x^3-12x^2+6x-1\right)=$

$t=2x-1\Rightarrow dt=2dx$

$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x-\frac{1}{6}+C$

Oba výsledky nejsou zcela stejné:

$\int(2x-1)^2\,dx=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$ a $\int(2x-1)^2\,dx=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x-\frac{1}{6}+C$

Integrály se liší o $\frac{1}{6}$, což není problém, protože integrování se výsledky mohou o konstantu lišit.

Př. 3: Vypočti:

a) $\int\left(ax^2+ae^t-\pi\right)dx$ b) $\int\left(ax^2+ae^t-\pi\right)da$ c) $\int\left(ax^2+ae^t-\pi\right)dt$

a) $\int\left(ax^2+ae^t-\pi\right)dx = a\int x^2\,dx + ae^t\int 1\,dx - \pi\int 1\,dx = a\frac{x^3}{3}+ae^t x-\pi x+C$

b) $\int\left(ax^2+ae^t-\pi\right)da = x^2\int a\,da + e^t\int a\,da - \int \pi\,da = x^2\frac{a^2}{2}+e^t\frac{a^2}{2}-\pi a+C$

c) $\int\left(ax^2+ae^t-\pi\right)dt = ax^2\int 1\,dt + a\int e^t\,dt - \pi\int 1\,dt = ax^2 t+ae^t-\pi t+C$

Pedagogická poznámka: Je potřeba, aby na následující část hodiny, zbylo alespoň 25 minut a studenti si sami ozkoušeli rozhodování mezi jednotlivými možnými postupy. Před příkladem 4 a 5 si vždy necháme čas a každý student si má rozmyslet, kterou z metod na výpočet jednotlivých integrálů zvolí. Poté si volby společně projdeme a zhodnotíme. Pak studenti počítají jednotlivé body a následuje společný rozbor příkladu 5.

Př. 4: Vypočti:

a) $\int \cos x\cdot x\,dx$ b) $\int \cos x^2\cdot x\,dx$ c) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$

a) $\int \cos x\cdot x\,dx$

výraz v integrálu obsahuje součin funkcí, ani jedna z nich není derivací druhé $\Rightarrow$ použijeme metodu per partes:

$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

$\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\cdot\sin x-\int \sin x\,dx = x\cdot\sin x-(-\cos x)+C$

$u = x, u' = 1$

$v=\sin x, v'=\cos x$

b) $\int \cos x^2\cdot x\,dx$

výraz v integrálu obsahuje součin dvou funkcí, jeden ze členů neumíme samostatně zderivovat, druhý člen je téměř derivací vnitřní funkce z první funkce $\Rightarrow$ použijeme substituci

$\int \cos x^2\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin x^2+C$

$t=x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

c) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$

výraz v integrálu obsahuje podíl, výraz v čitateli není derivací výrazu ve jmenovateli $\Rightarrow$ nemůžeme použít ani substituci ani per partes $\Rightarrow$ zkusíme výraz upravovat

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}dx = \int (1+\cos x)\,dx =$$
$$= \int 1dx + \int \cos x\,dx = x + \sin x + C$$

Př. 5: Vypočti:

a) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ b) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ c) $\int \sin\left(e^x\right)\cdot e^x dx$

a) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

výraz v integrálu obsahuje podíl logaritmu a mocninné funkce, můžeme ho přepsat na součin a logaritmus zderivovat na funkce $\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ použijeme metodu per partes

$$\int uv' \quad dx = uv \qquad -\int u'v\,dx$$

$$\int \ln x \cdot \frac{1}{x^3}dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

$u = \ln x, u' = \frac{1}{x}$

$v' = \frac{1}{x^3}, v = -\frac{1}{2x^2}$

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

logaritmus ve jmenovateli je pod odmocninou $\Rightarrow$ derivováním nezískáme mocninou funkci $\Rightarrow$ nemůžeme použít metodu per partes $\Rightarrow$ zkusíme substituci

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

c) $\int \sin\left(e^x\right)\cdot e^x dx$

výraz $\sin\left(e^x\right)$ nedokážeme samostatně integrovat, integrál obsahuje derivaci její vnitřní funkce $\Rightarrow$ substituce

$$\int \sin\left(e^x\right)\cdot e^x dx = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos\left(e^x\right) + C$$

$t = e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx$

Shrnutí: